

文章编号: 1000 8055(2008)01 0156-07

新型自适应 Terminal 滑模控制及其应用

黄国勇, 姜长生, 薛雅丽

(南京航空航天大学 自动化学院, 南京 210016)

摘 要: 针对一类高阶 MIMO 非线性系统设计了基于快速模糊干扰观测器的自适应 Terminal 滑模控制方案. 通过设计快速模糊干扰观测器, 克服了传统模糊干扰观测器在误差较小时收敛速度慢的缺点. 严格证明了跟踪误差及观测误差均在有限时间内收敛到零的小区域. 最后在高超声速条件下, 对空天飞行器再入过程的姿态控制进行仿真, 结果表明了所设计干扰观测器的优越性和闭环控制方案的有效性.

关 键 词: 航空、航天推进系统; 快速模糊干扰观测器; Terminal 滑模; 有限时间内收敛

中图分类号: TP183; V249

文献标识码: A

An adaptive terminal sliding mode control and its applications

HUANG Guoyong, JIANG Changsheng, XUE Yali

(College of Automation Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A novel adaptive Terminal sliding mode control based on fast fuzzy disturbance observer is designed for a high order MIMO (multiple input multiple output) nonlinear system. To solve the shortcoming of learning slowly of traditional fuzzy disturbance observer when the approximation errors are very small, a fast fuzzy disturbance observer is designed. It is strictly proved that the tracking errors and approximation errors converge to very small regions in finite time. Finally, simulation results of ASV (aerospace vehicle) reentry demonstrate the effectiveness of presented control scheme.

Key words: aerospace propulsion system; fuzzy disturbance observer; terminal sliding mode; finite time convergence

滑模控制(Sliding mode control, SMC)由于设计简单、鲁棒性强, 一直受到人们的关注^[1]. 然而, 传统 SMC 通常采用线性滑模面, 只能保证跟踪误差渐进稳定到平衡点, 并且抖振的存在很容易激发系统的未建模动态. Man 等^[2]通过引入神经网络中最终吸引子(Terminal attractor)的概念, 设计了 Terminal 滑模控制(Terminal sliding mode control, TSMC), 使跟踪误差在有限时间内收敛到平衡零点. Park 等^[3]为了避免文献[2]中的奇异问题, 提出了另一种带补偿函数的

TSMC, 消除了 SMC 的到达过程, 并且可以任意设计误差的收敛时间. 然而, 文献[3]中存在如 Terminal 滑模面的导数不连续、对干扰的处理过于保守等问题. Yu 等^[4]提出了避免出现非实数情况的 TSMC, 但仅仅考虑了二阶系统, 且最后得到的收敛区域可能很大.

模糊干扰观测器(Fuzzy disturbance observer, FDO)能在线无限逼近未知干扰和不确定, 且优于直接或间接自适应模糊方法^[5,6], 因而成为当前研究的热点. 但传统 FDO 在逼近误差很小时, 调节速

收稿日期: 2006 08 05; 修订日期: 2007 12 20

基金项目: 国家自然科学基金(90405011, 90716028)

作者简介: 黄国勇(1977-), 男, 湖北天门人, 博士生, 从事空天飞行器的自主、智能控制研究.

姜长生(1942-), 男, 江苏六合人, 教授、博导, 从事空天飞行器的自主、智能控制研究.

度慢. 受文献[7]启发, 通过改进 FDO 的自适应学习律, 提出了快速模糊干扰观测器(Fast fuzzy disturbance observer, FFDO), 缩短了 FDO 的逼近时间, 消除了文献[5]中对于未知干扰变化缓慢的限制; 然后, 针对一类高阶 MIMO 系统设计了自适应 TSMC; 最后, 在高超声速条件下对空天飞行器再入大气层的姿态控制进行仿真, 结果表明, 所提出方法具有强自适应性和快速响应速度.

1 快速模糊干扰观测器设计

1.1 系统描述

考虑如下高阶 MIMO 非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{r_1-1} &= x_{r_1} \\ \dot{x}_{r_1} &= f_1(\mathbf{x}) + \Delta f_1(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m g_{1i}(\mathbf{x})u_i + \\ &\quad \sum_{i=1}^m \Delta g_{1i}(\mathbf{x})u_i + d_1 \\ y_1 &= x_1 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-r_m+1} &= x_{n-r_m+2} \\ &\vdots \\ \dot{x}_{r_m-1} &= x_{r_m} \\ \dot{x}_{r_m} &= f_m(\mathbf{x}) + \Delta f_m(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m g_{mi}(\mathbf{x})u_i + \\ &\quad \sum_{i=1}^m \Delta g_{mi}(\mathbf{x})u_i + d_m \\ y_m &= x_{n-r_m+1} \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $n = r_1 + \dots + r_m$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是系统可测状态, u 为控制输入, y_i 是系统输出, $\Delta f_i(\mathbf{x})$, $\Delta g_{ii}(\mathbf{x})$ 分别表示 $f_i(\mathbf{x})$, $g_{ii}(\mathbf{x})$ 的不确定项, d_i 表示外部干扰, $i = 1, \dots, m$. 控制任务是设计控制量 u 使输出 y_i 及其直到第 $r_i - 1$ 阶导数 $\dot{y}_i, \dots, y_i^{(r_i-1)}$ 在有限时间内跟踪给定信号 $y_{id}, \dot{y}_{id}, \dots, y_{id}^{(r_i-1)}$.

首先将系统(1)改写成如下形式

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}_r = (\dot{x}_{r_1}, \dots, \dot{x}_{r_m})^T$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T, \mathbf{G}(\mathbf{x}) = [g_{ij}(\mathbf{x})],$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{d},$$

$$\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\Delta f_1(\mathbf{x}), \dots, \Delta f_m(\mathbf{x}))^T,$$

$$\Delta \mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\Delta g_{ij}(\mathbf{x})],$$

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T.$$

$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 称为综合干扰, 它通常是未知的, 并且包含了参数不确定和外部扰动. 利用模糊逻辑系统的逼近能力, 采用 FDO 逼近未知的扰动 $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, 于是构建下面的动态系统

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \theta) \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \theta) = \mathbf{A}\mathbf{x}_r + \mathbf{B}(\mathbf{x}_r - \mathbf{x})^{\tau/\delta} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}|\theta),$$

$$\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, \dots, a_m), a_i > 0,$$

$$\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, \dots, b_m), b_i > 0,$$

$$(\mathbf{x}_r - \mathbf{x})^{\tau/\delta} = ((x_{r_1} - x_1)^{\tau/\delta_1}, \dots, (x_{r_m} - x_m)^{\tau/\delta_m})^T,$$

τ, δ 为正奇数, $i = 1, \dots, m$; $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}|\theta) = \theta^T \xi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 表示 FDO 的输出, 是一类采用 IF-THEN 规则的模糊逻辑系统, 运用单点模糊化、乘积推理、重心法去模糊, θ 是可调参数, $\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 是模糊基函数, 参见文献[5]. 在不引起混淆的情况下, 采用 Φ 表示 $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}|\theta)$. 定义 $\zeta = \mathbf{x}_r - \mathbf{x}$ 为观测器误差, 从(2)式和(3)式可以看出当 $\zeta \rightarrow 0$ (即 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_r$) 时, 意味着 $\Phi \rightarrow \Phi$. 文献[5]针对单变量 FDO 设计了如下形式 θ 的自适应学习律

$$\dot{\theta} = \kappa \xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (4)$$

其中 $\kappa > 0$. 从(4)式可以看出, 由于 κ 是常数, $\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 的值在 0~1 间缓慢变化, 因此当 ζ 很小时, θ 的学习速度非常慢, 从而导致 FDO 逼近误差不能很快收敛到事先设计的有界小区域, 进而影响了跟踪品质. 为改善 FDO 的性能, 设计如下

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \text{Proj}[\kappa \xi(\mathbf{x}, \mathbf{u})(\zeta + \zeta^{\tau/\delta})^T] \\ &= \kappa \xi(\mathbf{x}, \mathbf{u})(\zeta + \zeta^{\tau/\delta})^T - I_0 \kappa \frac{(\zeta + \zeta^{\tau/\delta})^T \theta^T \xi(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\|\theta\|^2} \theta \end{aligned} \quad (5)$$

$$I_0 = \begin{cases} 0, & \text{if } \|\theta\|^2 < \mathbf{M}_0, \text{ or } \|\theta\|^2 = \mathbf{M}_0 \\ \text{and } (\zeta + \zeta^{\tau/\delta})^T \theta^T \xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0 \\ 1, & \text{if } \|\theta\|^2 = \mathbf{M}_0 \text{ and } (\zeta + \zeta^{\tau/\delta})^T \theta^T \xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) < 0 \end{cases}$$

其中 $\text{Proj}[\cdot]$ 表示投影算子, 保证 θ 在调节过程中有界, $\mathbf{M}_0$ 是参数的可行域, τ, δ 为正奇数且 $\tau < \delta$. 从(5)式可知, 当 $\|\zeta\| \rightarrow 0$ 时, 因为 $\|\zeta^{\tau/\delta}\| > \|\zeta\|$, 所以 θ 按(5)式调节比按(4)式调节速度快.

例如当(4)式中 $\zeta = 0.001$ 时, $\dot{\theta} = 0.001\kappa\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. 为便于比较, 仅考察(5)式中的第一列, 即 $\zeta_1 = 0.001$, 选择 $\tau/\delta = 1/3$, 可以得到 $\dot{\theta}_1 = 0.101\kappa\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. 这表明在相同条件下, FFDO 的学习率是 FDO 的 101 倍.

注 1: 不能通过无限增大(4)式中 κ 的值来提

高 FDO 的学习速度, 过大的 κ 会产生“过学习”, 从而导致系统抖动和不稳定。

1.2 FFDO 性能分析

定理 1 如果 FFDO 的可调参数由(5)式自适应调节, 那么观测误差 ζ 将最终一致有界。

证明: 设 θ^* 为 FFDO 的最优参数向量, 定义为

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in M_\theta} \left[\sup_{x \in M_x} \|\Phi(x, u) - \Phi\| \right] \quad (6)$$

其中 M_x 表示 x 的某个紧集。则 $\Phi(x, u) = (\theta^*)^T \xi(x, u) + \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x)$ 表示 FFDO 的最佳逼近误差, 且 $\|\varepsilon(x)\| \leq \bar{\varepsilon}$ 。由(2), (3)式可以得到

$$\dot{\zeta} = -A\zeta - B\zeta^{\nabla\delta} + \bar{\theta}^T \xi(x, u) + \varepsilon(x) \quad (7)$$

其中 $\bar{\theta} = \theta^* - \theta$ 为参数估计误差。考虑如下 Lyapunov 函数

$$V = 0.5\zeta^T \zeta + \delta'(\tau_+ \delta)(\zeta^{(\tau_+ \delta)/(2\delta)})^T \zeta^{(\nabla\delta)/(2\delta)} + \frac{1}{2\kappa} \text{tr}(\bar{\theta}^T \bar{\theta}) \quad (8)$$

为证明简洁, 令 $\tau_+ = \tau_+ \delta = \delta, i = 1, \dots, m$ 。将(8)式两边对时间求微分有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (\zeta^{(\tau_+ \delta)/(2\delta)})^T \text{diag}(\zeta_1^{(\tau_+ \delta)/(2\delta)}, \zeta_2^{(\tau_+ \delta)/(2\delta)}), \\ &\quad \zeta_3^{(\tau_+ \delta)/(2\delta)} \dot{\zeta} + \zeta^T \dot{\zeta} + \frac{1}{\kappa} \text{tr}(\bar{\theta}^T \dot{\bar{\theta}}) = \\ &(\zeta + \zeta^{\nabla\delta})^T ((-A\zeta - B\zeta^{\nabla\delta} + \bar{\theta}^T \xi + \varepsilon) + \frac{1}{\kappa} \text{tr}(\bar{\theta}^T \dot{\bar{\theta}})) \end{aligned} \quad (9)$$

设 $\lambda_{\min}(A) = \sigma$, $\lambda_{\min}(B) = \lambda$ 则有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sigma \|\zeta\|^2 - \lambda \|\zeta^{\nabla\delta}\|^2 + \\ &\quad \frac{1}{\kappa} \text{tr}(\bar{\theta}^T \dot{\bar{\theta}}) + (\zeta + \zeta^{\nabla\delta})^T \bar{\theta}^T \xi + \\ &\quad (\zeta + \zeta^{\nabla\delta})^T \varepsilon \leq \sigma \|\zeta\|^2 - \lambda \|\zeta^{\nabla\delta}\|^2 + \\ &\quad \text{tr}(\bar{\theta}^T \frac{1}{\kappa} \dot{\bar{\theta}} + \bar{\theta}^T \xi (\zeta + \zeta^{\nabla\delta})^T) + (\zeta + \zeta^{\nabla\delta})^T \varepsilon \end{aligned} \quad (10)$$

将(5)式代入(10)式可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sigma \|\zeta\|^2 - \lambda \|\zeta^{\nabla\delta}\|^2 + (\|\zeta\| + \|\zeta^{\nabla\delta}\|) \bar{\varepsilon} \leq \\ &\quad - \frac{\sigma}{2} \|\zeta\|^2 + \frac{1}{2\sigma} \bar{\varepsilon}^2 - \left(\sqrt{\frac{\sigma}{2}} \|\zeta\| - \sqrt{\frac{1}{2\sigma}} \bar{\varepsilon} \right)^2 - \\ &\quad \frac{\lambda}{2} \|\zeta^{\nabla\delta}\|^2 + \frac{1}{2\lambda} \bar{\varepsilon}^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \|\zeta^{\nabla\delta}\| - \sqrt{\frac{1}{2\lambda}} \bar{\varepsilon} \right)^2 \\ &\leq \frac{\sigma}{2} \|\zeta\|^2 + \frac{1}{2\sigma} \bar{\varepsilon}^2 - \frac{\lambda}{2} \|\zeta\|^{2\nabla\delta} + \frac{1}{2\lambda} \bar{\varepsilon}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

由(11)式知当 $\|\zeta\| > \max(\bar{\varepsilon}/\sigma, (\bar{\varepsilon}/\lambda)^{\delta/\tau})$ 时, $\dot{V}$ 负

定。因此, ζ 将最终收敛到小区域 $\{\zeta \mid \|\zeta\| \leq \max(\bar{\varepsilon}/\sigma, (\bar{\varepsilon}/\lambda)^{\delta/\tau})\}$, 即观测误差 ζ 最终一致有界。于是, 由前述知, $\bar{\theta}^T \xi(x, u)$ 也将收敛到一个非常小的区域。下面将进一步证明 ζ 在有限时间内收敛。

引理 1^[7]: 假设连续函数 $v(t)$ 满足微分不等式

$$\dot{v}(t) \leq -av(t) - bv^{q/p}(t), \forall t \geq t_0 \quad (12)$$

且 $a, b > 0, p, q$ 为正奇数。则 $v(t)$ 将在有限时间 t_r 内收敛到零。且

$$t_r = t_0 + \frac{p}{a(p-q)} \ln \frac{av(t_0)^{(p-q)/p} + b}{b} \quad (13)$$

定理 2 如果观测误差动态系统按(7)式变化, FFDO 的可调参数由(5)式自适应调节, 那么观测误差 ζ 将在有限时间内收敛到零的小邻域。

证明: 重新构造如下 Lyapunov 函数

$$V_1 = 0.5\zeta^T \zeta \quad (14)$$

将(14)式两边对时间求微分有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \zeta^T \dot{\zeta} = \\ &\zeta^T (-A\zeta - B\zeta^{\nabla\delta} + \bar{\theta}^T \xi(x, u) + \varepsilon) \leq \\ &\quad -\sigma \|\zeta\|^2 - \lambda \|\zeta\|^{(\tau_+ \delta)/\delta} + \\ &\quad \|\zeta\| (\|\bar{\theta}^T \xi(x, u)\| + \bar{\varepsilon}) \leq \\ &\quad -\sigma \|\zeta\|^2 - (\lambda - (\|\bar{\theta}^T \xi(x, u)\| + \bar{\varepsilon})/\|\zeta\|^{(\tau_+ \delta)/\delta}) \|\zeta\|^{(\tau_+ \delta)/\delta} \leq -2\sigma V_1 - \\ &\quad 2^{(\tau_+ \delta)/(2\delta)} (\lambda - (\|\bar{\theta}^T \xi(x, u)\| + \bar{\varepsilon})/\|\zeta\|^{(\tau_+ \delta)/\delta}) V_1^{(\tau_+ \delta)/(2\delta)} \end{aligned} \quad (15)$$

可以通过选择合适的参数使得

$$\lambda - (\|\bar{\theta}^T \xi(x, u)\| + \bar{\varepsilon})/\|\zeta\|^{(\tau_+ \delta)/\delta} \geq \lambda > 0 \quad (16)$$

即

$$\|\zeta\| > ((\|\bar{\theta}^T \xi(x, u)\| + \bar{\varepsilon})/(\lambda - \lambda))^{\delta/\tau} \quad (17)$$

时由(15)式得到

$$\dot{V} \leq -2\sigma V - 2^{(\tau_+ \delta)/(2\delta)} \lambda V_1^{(\tau_+ \delta)/(2\delta)} \leq 0 \quad (18)$$

根据引理 1, 在(17)式所示的区域内, V_1 将在有限时间内收敛, 即意味着 ζ 将在有限时间 t_{r1} 内收敛到

$$\Delta = \{\zeta \mid \|\zeta\| \leq ((\|\bar{\theta}^T \xi(x, u)\| + \bar{\varepsilon})/(\lambda - \lambda))^{\delta/\tau}\} \quad (19)$$

且

$$t_{r1} = \frac{\delta}{\sigma(\delta - \tau)} \ln \frac{2\sigma V(\zeta_0)^{(\delta - \tau)/\delta} + 2^{(\tau_+ \delta)/(2\delta)} \lambda}{2^{(\tau_+ \delta)/(2\delta)} \lambda} \quad (20)$$

注 2 由模糊逻辑系统的逼近能力知 $\bar{\varepsilon}$ 可以任意

小. 由定理 1 知 $\bar{\theta}^T \xi(x, u)$ 在 (5) 式所示学习律下, 将很快收敛到很小的值. 进一步, 注意到 $\bar{\theta} = -\theta$, 比较 (5) 式和 (7) 式可知, 如果设计 κ 使得 $\kappa \xi(x, u)$ 的元素大于 $\max(\lambda_{\max}(A), \lambda_{\max}(B))$ (事实上, 仿真中 κ 通常取几百, 而 A, B 的特征值通常是个位数, 此条件容易满足). 那么, $\bar{\theta}^T \xi(x, u)$ 的收敛速度将比 ζ 的快, 同时注意到 $\|\zeta\|^{\gamma_0} > \|\zeta\|$, 所以 (16) 式很容易成立. 这意味着区域 Δ_1 可以非常小. 而在文献[4]中由于没有采取有效消除干扰的措施, 并对不确定只做了简单的假设, 从给出的收敛区域的表达式可以看出, 只要干扰或不确定上界函数系数的值较大, 都不能保证收敛区域非常小. 因此本文的方法大大降低了保守性.

2 自适应 Terminal 滑模控制设计

近年来, 一种 Terminal 滑模控制引起了学者的兴趣^[2,4]. Terminal 滑模可以由 (21) 式描述

$$\dot{s} = \dot{x} + \alpha x + b |x|^{q/p} \text{sign}(x) = 0 \quad (21)$$

其中, $x \in (9)$ 是状态变量, $a, b > 0$, q, p 是正奇数且 $p > q$. 通过解微分方程, 可以得到 (21) 式的解析解, 即状态到达 $x = 0$ 的时间为

$$t_r = \frac{p}{a(p-q)} \ln \frac{a |x(0)|^{(p-q)/p} + b}{b} \quad (22)$$

系统 (1) 的输入输出关系可以表示成

$$y = f(x) + G(x)u + \Phi(x, u) \quad (23)$$

其中, $y = (y^{r_1}, \dots, y^{r_m})^T$, 其余与 (2) 式中同. 设计如下控制律

$$u = G^{-1}(x)(-f(x) + u_s) \quad (24)$$

$$u_s = (u_{s1}, \dots, u_{sm})^T \quad (25)$$

$$u_{si} = - \sum_{i=0}^{r_i-2} \alpha_i s_i^{(r_i-i-1)} - \sum_{i=0}^{r_i-2} \beta_i \frac{d^{r_i-i-1}}{dt^{r_i-i-1}} (|s_i|^{y_i} \text{sign}(s_i)) + y_{id}^{(r_i)} - k_1 s_{i-1} - c_1 |s_{i-1}|^p \text{sign}(s_{i-1}) - \bar{\theta}_i^T \xi(x, u) \quad (26)$$

其中, $\alpha_i, \beta_i > 0, 0 < y_i, \rho < 1, k_1, c_1 > 0, \bar{\theta}_i^T$ 表示 $\bar{\theta}^T$ 的第 i 行. 将 (24) ~ (26) 式代入 (23) 式可得

$$\dot{y} = u_s + \Phi(x, u) \quad (27)$$

由此可见系统 (27) 可以解耦成 m 个相同的子系统来设计, 第 i 个子系统可以表示成

$$y^{r_i} = u_{si} + \Phi(x, u) \quad (28)$$

系统 (28) 的性能由如下定理给出.

定理 3 系统 (28) 在控制 (24) ~ (26) 的作用下, 并且 FFDO 的参数按 (5) 式自适应调整, 则输出 y_i 及其直到第 r_i-1 阶导数 $\dot{y}_i, \dots, y_i^{(r_i-1)}$ 在有限时间内跟踪给定信号 $y_{id}, \dot{y}_{id}, \dots, y_{id}^{(r_i-1)}$, 保证跟踪误差收敛到一个很小的区域.

证明: 令 $s_0 = y_i - y_{id}$, 并考虑如下的递阶滑模面

$$\begin{aligned} s_1 &= \dot{s}_0 = \alpha_0 s_0 + \beta_0 |s_0|^{y_0} \text{sign}(s_0) \\ s_2 &= \dot{s}_1 = \alpha_1 s_1 + \beta_1 |s_1|^{y_1} \text{sign}(s_1) \\ &\vdots \\ s_{r_i-1} &= \dot{s}_{r_i-2} = \alpha_{r_i-2} s_{r_i-2} + \beta_{r_i-2} |s_{r_i-2}|^{y_{r_i-2}} \text{sign}(s_{r_i-2}) \end{aligned} \quad (29)$$

其中, $\alpha_i, \beta_i > 0, 0 < y_i < 1, (i = 0, \dots, r_i-2)$. 显然, 由 (29) 式知, 如果 s_{r_i-1} 收敛到平衡点零, 则 $s_{r_i-2}, \dots, s_0$ 将依次收敛到零. 下面将首先证明 s_{r_i-1} 在有限时间内收敛到 $s_{r_i-1} = 0$ 的小邻域内. 由

$$\dot{s}_i = \dot{s}_{i-1} + \alpha_{i-1} s_{i-1} + \beta_{i-1} |s_{i-1}|^{y_{i-1}} \quad (30)$$

可得

$$s_i^{(k)} = s_{i-1}^{(k+1)} + \alpha_{i-1} s_{i-1}^{(k)} + \beta_{i-1} \frac{d^k}{dt^k} |s_{i-1}|^{y_{i-1}} \quad (31)$$

其中, $i = r_i-1, \dots, 1$ 于是

$$\begin{aligned} \dot{s}_{r_i-1} &= s_{r_i}^{(r_i)} + \left[\sum_{i=0}^{r_i-2} \alpha_i s_i^{(r_i-i-1)} + \sum_{i=0}^{r_i-2} \beta_i \frac{d^{r_i-i-1}}{dt^{r_i-i-1}} (|s_i|^{y_i} \text{sign}(s_i)) \right] = \\ &= y_i^{(r_i)} - y_{id}^{(r_i)} + \left[\sum_{i=0}^{r_i-2} \alpha_i s_i^{(r_i-i-1)} + \sum_{i=0}^{r_i-2} \beta_i \frac{d^{r_i-i-1}}{dt^{r_i-i-1}} (|s_i|^{y_i} \text{sign}(s_i)) \right] = \\ &= \left[\sum_{i=0}^{r_i-2} \alpha_i s_i^{(r_i-i-1)} + \sum_{i=0}^{r_i-2} \beta_i \frac{d^{r_i-i-1}}{dt^{r_i-i-1}} (|s_i|^{y_i} \text{sign}(s_i)) \right] + \\ &= u_s + \Phi(x, u) - y_{id}^{(r_i)} \end{aligned} \quad (32)$$

将 (26) 式代入 (32) 式得

$$\begin{aligned} \dot{s}_{r_i-1} &= -k_1 s_{r_i-1} c_1 |s_{r_i-1}|^p \cdot \\ &\quad \text{sign}(s_{r_i-1}) + \bar{\theta}_i^T \xi(x, u) + \varepsilon \end{aligned} \quad (33)$$

定义如下 Lyapunov 函数

$$V_{r_i-1} = 0.5 s_{r_i-1}^2 \quad (34)$$

对 (34) 式两边求时间的微分得

$$\dot{V}_{r_i-1} = s_{r_i-1} \dot{s}_{r_i-1} =$$

$$\begin{aligned} & s_{r_i-1}(-k_1 s_{r_i-1} - c_1 |s_{r_i-1}|^\rho \text{sign}(s_{r_i-1}) + \\ & \bar{\theta}_i^T \xi(x, u) + \bar{\varepsilon}) \leq -k_1 s_{r_i-1}^2 - c_1 |s_{r_i-1}|^{\rho+1} + \\ & |s_{r_i-1}| \cdot |\bar{\theta}_i^T \xi(x, u) + \bar{\varepsilon}| \leq -k_1 s_{r_i-1}^2 - \\ & (c_1 - (|\bar{\theta}_i^T \xi(x, u) + \bar{\varepsilon}| / |s_{r_i-1}|^\rho) |s_{r_i-1}|^{\rho+1} \end{aligned} \quad (35)$$

如果正常数 c_1 使得

$$c_1 - (|\bar{\theta}_i^T \xi(x, u) + \bar{\varepsilon}| / |s_{r_i-1}|^\rho) \geq c_1 \quad (36)$$

成立,即

$$|s_{r_i-1}| \geq (|\bar{\theta}_i^T \xi(x, u) + \bar{\varepsilon}| / (c_1 - \underline{c}_1))^{1/\rho} \quad (37)$$

则(35)式可以写成

$$V_{r_i-1} \leq -2k_1 V_{r_i-1} - 2^{(\rho+1)/2} \underline{c}_1 V_{r_i-1}^{(\rho+1)/2} \quad (38)$$

由引理1可知,在(37)式所示的区域内, V_{r_i-1} 将在有限时间内收敛,即意味着 s_{r_i-1} 将在有限时间 t_{r_i-1} 内收敛到

$$\begin{aligned} \Delta_{r_i-1} &= [s_{r_i-1} \mid |s_{r_i-1}| < \\ & (|\bar{\theta}_i^T \xi(x, u) + \bar{\varepsilon}| / (c_1 - \underline{c}_1))^{1/\rho}] \end{aligned} \quad (39)$$

且 t_{r_i-1} 为

$$\begin{aligned} t_{r_i-1} &= t_{r1} + \\ & \frac{1}{k_1(1-\rho)} \ln \frac{2k_1 V(s_{r_i-1}(t_{r1}))^{(1-\rho)/2} + 2^{(\rho+1)/2} \underline{c}_1}{2^{(\rho+1)/2} c_1} \end{aligned} \quad (40)$$

注3 由定理2可知,经过 t_{r_i} 时间后, $|\bar{\theta}_i^T \xi(x, u) + \bar{\varepsilon}|$ 将收敛到非常小的区域,同时注意到 $|s_{r_i-1}|^\rho > |s_{r_i-1}|$ (当 $|s_{r_i-1}| < 1$ 时),这表明即使 $|s_{r_i-1}|$ 非常小,(37)式也容易满足。例如,当 c_1 取5, $\underline{c}_1$ 取3.9, $|\bar{\theta}_i^T \xi(x, u)| = 0.01$, $\bar{\varepsilon} = 0.001$, $\rho = 1/3$ 时,可解得 $|s_{r_i-1}| \geq 1 \times 10^{-6}$, 这意味 Δ_{r_i-1} 同样是非常小的区域。

采用完全类似的方法可以证明 s_{r_i-2} 将在有限时间 t_{r_i-2} 内收敛到非常小的区域 Δ_{r_i-2} 。同理可以证明 s_i 将在有限时间 t_i 内收敛到非常小的区域 Δ_i ($i = r_i - 3, \dots, 0$)。由(30)式可知, $y_i, \dot{y}_i, \dots, y_i^{(r_i-1)}$ 将跟踪 $y_{id}, \dot{y}_{id}, \dots, y_{id}^{(r_i-1)}$, 并经过 t_0 后收敛到各自的小区域内。

注4 从(33)式可知,由于设计了Terminal滑模形式的有限时间收敛趋近律,因此滑模面可以在有限时间内收敛。同时,由于 $0 < \rho < 1$, 则 $|s_{r_i-1}|^\rho \text{sign}(s_{r_i-1})$ 连续,消除了抖振。应当指出,如果 $\rho \rightarrow 0$, (33)式则表示传统的滑模控制;如果 $\rho \rightarrow 1$, 则成为线性控制。通过选择合适的 ρ 既消除抖振,又使系统具有鲁棒性。

3 空天飞行器再入控制系统设计

空天飞行器(Aerospace vehicle, ASV)再入大气层是一个复杂过程,其间飞行高度从120 km到着陆,速度从7.9 km/s到0变化,攻角最大可达45°,同时外部大气环境多变,这些都增加了控制难度。

ASV再入动力学和运动学方程由(41)、(42)式描述^[8]

$$\begin{cases} \dot{\Omega} = f_1 + g_{11} \omega + d_1 \\ \dot{\omega} = f_2 + g_{12} M + d_2 \\ \dot{y} = \Omega \end{cases} \quad (41)$$

其中, $\Omega = [\alpha \ \beta \ \mu]^T$ 表示攻角、侧滑角和倾斜角, $\omega = [p \ q \ r]^T$ 表示机体转动角速度, d_1, d_2 分别表示各自回路气动参数不确定和外部干扰, $M = Gu$ 表示控制力矩, G 为控制增益矩阵, $u = (\delta_L, \delta_R, \delta_D)^T$ 表示左、右升降副翼舵和方向舵的偏转,其他函数的表达式见文献[8]。(41)式描述了ASV作为刚体绕质心转动方程,其作为刚体的运动方程由下式描述

$$\begin{cases} H = V \sin(\phi) \\ \dot{\phi} = \frac{1}{MV} (L \cos(\mu) - Y \sin(\mu) \cos(\beta) - Mg \cos(\phi)) \\ \dot{V} = \frac{1}{M} (-D + Y \sin(\beta) - Mg \sin(\phi)) \end{cases} \quad (42)$$

其中, H, ϕ, V 分别表示飞行高度、飞行轨迹角、飞行速度, M 是飞行器质量, g 表示重力加速度, L, D, Y 分别表示机体的升力、阻力和侧力。

控制任务是设计控制律 u , 在存在综合干扰 d 情况下,使(43)中欧拉角 Ω 能在有限时间内跟踪由制导指令给出的信号 Ω_c , 同时保证 H, V 下降,满足后续末端能量管理的要求。

3.1 ASV外回路控制系统设计

根据多时间尺度假设,飞控系统可以分成快、慢回路控制系统,即角速度跟踪回路和角度跟踪回路。快回路带宽比慢回路的大得多,可以认为角速度跟踪结束后,角度响应还没有达到稳态,因此快、慢回路可以分开设计,并将快回路状态量作为慢回路的控制量,然后根据慢回路的指令信号设计快回路控制律。整个控制系统如图1所示:

慢回路的Terminal滑模面设计如下:

$$s = \Omega + \int_0^t (K_1 \Omega + K_2 |\Omega|^{q/p_1} \text{sign}(\Omega)) dt = 0 \quad (43)$$

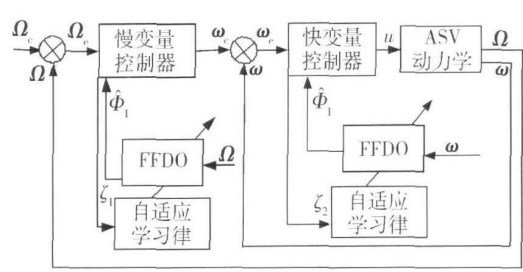


图 1 系统控制结构图

Fig. 1 Schematic diagram of control system

其中, $\Omega_e = \Omega - \Omega_c$, $K_i = \text{diag}(k_{i1}, k_{i2}, k_{i3})$, $i = 1, 2$, $|\Omega_e|^{q_1/p_1} = (|\alpha|^{q_1/p_1}, |\beta|^{q_1/p_1}, |\mu|^{q_1/p_1})^T$, $\text{sign}(\Omega_e) = (\text{sign}(\alpha), \text{sign}(\beta), \text{sign}(\mu))^T$. 并设计如下 TSMC 形趋近律:

$$\dot{s} = -C_1 s - C_2 |s|^{p_1} \text{sign}(s) \quad (44)$$

其参数及记号类似(43)式. 由此可以解出控制律

$$\omega_c = (g_{11})^{-1}(-f_1 - K_1 \Omega_e - K_2 |\Omega_e|^{q_1/p_1} \text{sign}(\Omega_e) - \mathbf{d}_1 - C_1 s - C_2 |s|^{p_1} \text{sign}(s) + \dot{\Omega}_c) \quad (45)$$

其中, $\mathbf{d}_1$ 是外回路 FFDO 的输出, 用来消除 d_1 的影响. ω_c 作为快回路的指令信号. 限于篇幅, 对其性能分析不再详细论述.

3.2 ASV 内回路控制系统设计

快回路的 Terminal 滑模面设计如下:

$$\sum = \omega_c + \int_0^t (K_3 \omega_c + K_4 |\omega_c|^{q_2/p_2} \text{sign}(\omega_c)) dt = 0 \quad (46)$$

其中, $\omega_c = \omega - \omega_c$. 同样采用 TSMC 形式趋近律

$$\dot{\sum} = -C_e \sum - C_4 |\sum|^{p_2} \text{sign}(\sum) \quad (47)$$

于是, 可以解出控制律

$$u = (g_{12}G)^{-1}(-f_2 - K_3 \omega_c - K_4 |\omega_c|^{q_1/p_1} \text{sign}(\omega_c) - \mathbf{d}_2 - C_3 \sum - C_4 |\sum|^{p_1} \text{sign}(\sum) + \dot{\omega}_c) \quad (48)$$

4 仿真结果

在高超声速条件下, 对 ASV 再入的姿态控制进行了仿真. 仿真参数如下: $M = 65\,000\text{ kg}$, $\text{Mach}(0) = 12.9$, $H(0) = 45\text{ km}$, $\varphi(0) = 0^\circ$; 慢回路参数: 外部干扰为 0, $\varrho = 7/9$, $K_1 = \text{diag}(1, 1, 1)$, $K_2 = C_1 = C_2 = \text{diag}(1.5, 1.5, 1.5)$, $q_1/p_1 = 5/7$; 快回路设计参数: $\varrho_2 = 7/9$, 外部干扰为 $1 \times 10^6 \sin(\pi t) (1, 1, 1)^T \text{ N} \cdot \text{m}$, $q_2/p_2 = 5/7$, $K_3 = K_4 = \text{diag}(3, 3, 3)$, $C_3 = C_4 = \text{diag}(1.5, 1.5, 1.5)$; 慢、快回路 FFDO 的参数: 学习率为 $k_1 = k_2 = 500$, $\tau_1/\delta = \tau_2/\delta = 3/5$, $A =$

$B = \text{diag}(5, 5, 5)$. FFDO 的输入是系统状态, 每个变量采用 5 个模糊语言变量: {负大, 负小, 零, 正小, 正大}, 于是总共使用 125 条规则. 图 2 是在外部干扰和气动参数存在不确定情况下, Terminal 滑模控制的角度跟踪曲线, 由于没有有效的消除扰动措施, 跟踪曲线存在较大抖动. 图 3 是自适应 Terminal 滑模控制的角度跟踪情况, 曲线不仅有很快的响应速度, 大约 0.5 s 左右到达稳态, 而且不存在波动, 充分证明了 FFDO 能有效逼近综合干扰和闭环系统的快速性、鲁棒性.

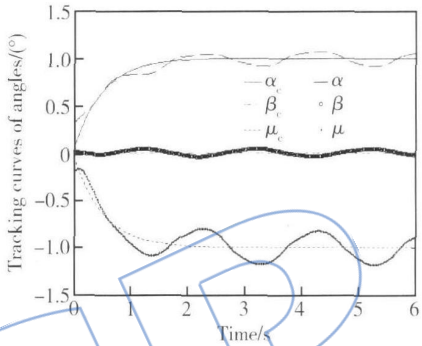


图 2 Terminal 滑模控制的角度跟踪曲线

Fig. 2 Tracking curves of Terminal sliding mode control

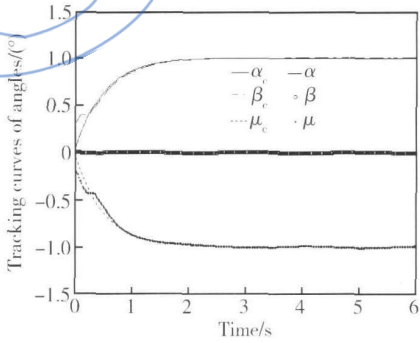


图 3 自适应 Terminal 滑模控制的角度跟踪

Fig. 3 Tracking curves of adaptive Terminal sliding mode control

5 结 论

首先针对传统 FDO 在观测误差非常小时学习缓慢的缺点, 设计了 FFDO, 严格证明了观测误差在有限时间内收敛到一个小区间. 然后基于 FFDO 设计了鲁棒 Terminal 滑模控制控制方案, 消除了系统不确定和外部干扰的影响, 并保证观测误差和系统误差均在有限时间内收敛到各自的小区域, 从而提高了整个闭环系统的响应速度. 最后, 在高超声速条件下, 对 ASV 再入中姿态控制仿真的结果充分显示了所设计方案的快速性和鲁棒性.

参考文献:

- [1] Young K D, Utkin V I, Ozguner U. A control engineer' s guide to sliding mode control[J]. IEEE Trans. On Control Systems Technology, 1999, 7(3): 328-342.
- [2] Man Z H, Paplinski A P, Wu H R. A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robot manipulators [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1994, 39: 2464-2469.
- [3] Park K B, Tsuiji T. Terminal sliding mode control of second- order nonlinear uncertain systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1999, 9 (11): 769-780.
- [4] YU Shuanghe, YU Xinghuo. Continuous finite time control for robotic manipulators with terminal sliding mode [J]. Automatica, 2005, (41): 1957-1964.
- [5] Kim E. A fuzzy disturbance observer and its application to control[J]. IEEE Trans. On Fuzzy Systems, 2002, 10 (1): 77-84.
- [6] Kim E. A discrete time fuzzy disturbance observer and its application to control[J]. IEEE Trans. On Fuzzy Systems. 2003, 11(3): 399-410.
- [7] YU Shuanghe, YU Xinghuo, MAN Zhihong. A fuzzy neural network approximator with fast terminal sliding mode and its applications [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 148 : 469-486.
- [8] 朱亮. 基于单隐层神经网络的空天飞行器直接自适应轨迹线性化控制[J]. 宇航学报, 2006, 27 (3): 338-353.
- ZHU Liang. Direct adaptive trajectory linearization control of aerospace vehicle using SHLNN[J]. Journal of Astronautics, 2006, 27 (3): 338-353.